MATHEMATIQUES SP PH-M

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Thème général

Le problème a pour objectif la mise en évidence de certaines propriétés des fonctions J_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies, pour tout entier relatif n, par :

$$x \to J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta.$$

Dans la première partie, on propose aux candidats l'étude des propriétés de ces fonctions, considérées comme coefficients de Fourier des fonctions $\theta \to \cos(x\sin\theta)$ et $\theta \to \sin(x\sin\theta)$.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'espace vectoriel des fonctions y développables en série entière en x et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 ;$$

elle fait apparaître la fonction J_n comme génératrice de cet espace.

Enfin, la troisième partie fait découvrir les propriétés d'orthogonalité des fonctions $y_k : x \to y_k(x) = J_n(s_k x)$, où les réels s_k sont les zéros dans l'intervalle $]0,\infty[$ de $J_n(x)$.

PREMIERE PARTIE

Développement en série de Fourier des fonctions : $\theta \to \cos(x\sin\theta)$ et $\theta \to \sin(x\sin\theta)$.

On considère les fonctions a et b des variables réelles x et θ définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$a(x,\theta) = \cos(x\sin\theta) \text{ et } b(x,\theta) = \sin(x\sin\theta).$$

1/ Etude des fonctions $\theta \to a(x,\theta)$ et $\theta \to b(x,\theta)$, où x est un réel donné.

a) Vérifier que ces fonctions sont périodiques, et préciser leur période.

b) Dans le cas particulier où x = 2, étudier leurs variations, et construire leurs courbes représentatives respectives dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $0, \vec{i}, \vec{j}$ d'axes x'0x et y'0y. On prendra comme unités de longueur : 2 cm sur l'axe x'0x et 4 cm sur l'axe y'0y.

Tournez la page S.V.P.

2/ Développement en série entière en x de la fonction J_0.

a) A tout $p \in \mathbb{N}$ on associe l'intégrale :

$$I_p = \int_0^{\pi} \sin^{2p}\theta \, d\theta.$$

Trouver une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}. Calculer alors la valeur de I_p pour tout p de N.

b) Etablir la convergence normale sur tout intervalle compact [a,b] de $\mathbb{R}$ de :

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}\sin^{2n}\theta}{(2n)!},$$

série de fonctions de la variable réelle θ, lorsque x est un nombre réel fixé.

c) Démontrer alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

d) En déduire les développements en série entière en x des fonctions :

$$x \to \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x\sin\theta)\, d\theta,$$

et

$$x \to \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x\sin\theta)\, d\theta.$$

3/ Développement en série de Fourier des fonctions $\theta \to a(x,\theta)$ et $\theta \to b(x,\theta)$.

a) Vérifier que, pour tout p de N, et pour tout x de $\mathbb{R}$, les intégrales :

$$\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin 2p\theta \, d\theta \text{ et } \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos(2p+1)\theta \, d\theta$$

ont pour valeur 0.

On pose, pour tout réel x, et pour tout entier relatif n :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta = J_n(x)$$

b) Montrer que les fonctions $\theta \to a(x,\theta)$ et $\theta \to b(x,\theta)$ sont développables en série de Fourier. Calculer leurs coefficients de Fourier respectifs, à l'aide des intégrales $J_n(x)$, et vérifier enfin que, pour tout (x,θ) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_1^\infty J_{2p}(x)\cos 2p\theta,$$

et

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_0^\infty J_{2p+1}(x)\sin(2p+1)\theta.$$

c) En déduire alors les développements en série de Fourier ci-dessus, en démontrant que, pour tout (x,θ) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)e^{in\theta},$$

après avoir trouvé la relation simple de colinéarité liant $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ (on pourra par exemple dans l'expression intégrale de $J_{-n}(x)$ effectuer un changement de variable).

4/ Applications du théorème de Parseval.

a) Appliquant le théorème de Parseval aux fonctions $\theta \to a(x,\theta)$ et $\theta \to b(x,\theta)$, donner une expression sous forme d'intégrale de chacune des sommes :

$$(J_0(x))^2 + 2\sum_1^\infty (J_{2p}(x))^2,$$

et

$$2\sum_0^\infty (J_{2p+1}(x))^2.$$

b) En déduire, pour tout x réel, les égalités :

$$J_0^2(x) + 2\sum_1^\infty (-1)^k J_k^2(x) = J_0(2x),$$

$$J_0^2(x) + 2\sum_1^\infty J_k^2(x) = 1.$$

page 184 4/5 -1992-
ENSI M (SP PH.M)

DEUXIEME PARTIE

Recherche de solutions de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

1/ Dérivabilité des fonctions J_n. Prouver que la fonction J_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Exprimer sous forme d'intégrales les dérivées successives $J_n^{(k)}(x)$.

2/ Equation différentielle admettant J_n pour solution.

a) n étant un entier relatif fixé, vérifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$xJ_n'(x) = -x^2(J_n''(x) + J_n(x)) + \frac{n}{\pi}\int_0^\pi x\cos\theta\cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta.$$

b) En déduire que la fonction J_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

(E_n) $\quad x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0.$

3/ Développement en série entière en x de $J_n(x)$.

a) Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$J_n(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} J_n^{(k)}(0) = R_p(x)$$

Trouver, pour tout $x \in \mathbb{R}$, un majorant de $|R_p(x)|$ ayant pour limite 0 lorsque p tend vers l'infini. En déduire que J_n est développable en série de Mac Laurin, de rayon de convergence infini.

b) k étant un entier strictement positif fixé, démontrer par récurrence que, pour tout n entier relatif, on a :

$$J_n^{(k)} = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i J_{n-k+2i}$$

c) Calculer $J_n^{(k)}(0)$ pour tout n entier naturel et pour tout k entier strictement positif.

d) En déduire que, pour tout n entier naturel, on a :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

4/ Recherche de l'ensemble des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ développables en série entière en x.

a) n étant un entier naturel donné, à quelles conditions doit satisfaire une suite réelle $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ pour que la fonction y, somme de la série entière de terme général $a_p x^p$ soit solution de (E_n) sur son intervalle ouvert de convergence, supposé a priori non vide ?

b) Pour toute suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant ces conditions, calculer, pour tout entier naturel k, a_{n+2k} en fonction de a_n. Quelles sont les valeurs des autres termes de la suite ?

c) Déduire de ce qui précède que l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ développables en série entière en x est de dimension 1, et donner une base de cet espace.

TROISIEME PARTIE

Propriétés d'orthogonalité des fonctions J_n

1/ Construction d'un espace préhilbertien C(0,1).

Soit C(0,1) l'espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle x définies et continues sur l'intervalle [0,1].

Démontrer qu'en associant à tout couple (f,g) de vecteurs de cet espace le nombre réel :

$$(f \bullet g) = \int_0^1 xf(x)g(x)\,dx,$$

on définit sur C(0,1) une forme bilinéaire symétrique définie positive ; l'espace C(0,1) devient ainsi un espace préhilbertien réel.

2/ Orthogonalité de la suite des fonctions $x \to J_n(s_k x)$ où les réels s_k sont les racines strictement positives de l'équation $J_n(x) = 0$.

a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, et pour tout α réel non nul, la fonction :

$$y : x \to y(x) = J_n(\alpha x)$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - n^2)\,y = 0.$$

b) En déduire, pour tout couple (α,β) de réels distincts non nuls, une primitive de la fonction :

$$x \to (\alpha^2 - \beta^2)x\,J_n(\alpha x)\,J_n(\beta x).$$

c) On admettra que l'ensemble des zéros de la fonction J_n sur l'intervalle $]0,\infty[$ s'identifie à l'ensemble des termes $\{s_1, \ldots, s_k, \ldots\}$ d'une suite tendant vers l'infini (et que l'on peut supposer croissante). Démontrer que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des restrictions à l'intervalle [0,1] des fonctions $x \to J_n(s_k x)$ est orthogonale dans l'espace préhilbertien C(0,1) ci-dessus défini.